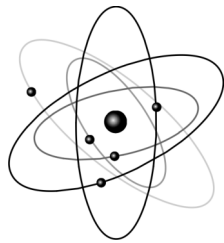


Modelowanie zjawisk społecznych

Maciej Wołoszyn

Applied Physics and Computer
Science Summer School



Kraków
11–29 lipca 2022
WFiIS AGH

Plan

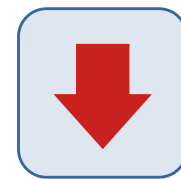
- symulacje dynamiki opinii społecznej
 - wybrane modele z dyskretną przestrzenią stanów (opinii) oraz z ciągłymi wartościami opinii
- relacje w sieciach społecznych
 - triady jako podstawowy element pozwalający na analizę tzw. *równowagi strukturalnej (Heidera)*
 - deterministyczna i stochastyczna ewolucja układu
 - znaczenie struktury sieci relacji

Symulacje dynamiki opinii publicznej

- formowanie się opinii w społeczeństwie:
 - do czego doprowadzi dany stan początkowy: **konsensus**, **polaryzacja**, **fragmentacja**... ?
 - jakie znaczenie ma to ile osób i jak na nas wpływa? jak wygląda sieć relacji społecznych?
 - jaki jest wpływ czynników zewnętrznych (np. media), przypadkowości... ?
- jak zastosować narzędzia znane z fizyki statystycznej?

Model Sznajdów

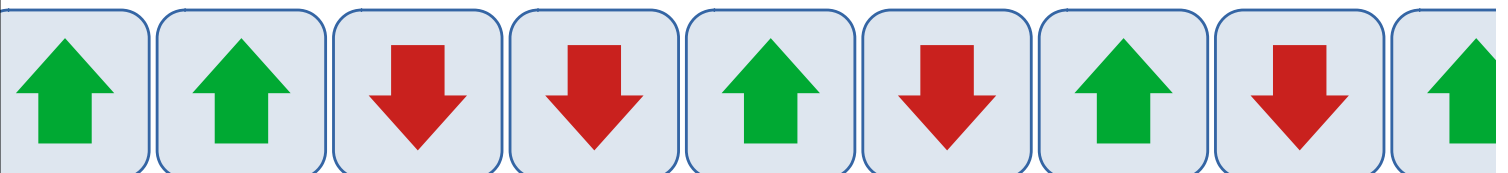
- opinia s_i i -tej osoby na jakiś temat: **TAK** lub **NIE**



$$s_i = +1$$

$$s_i = -1$$

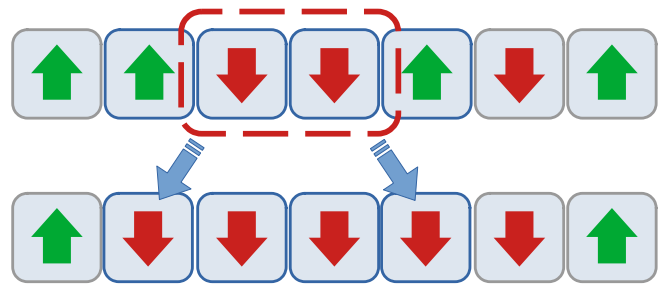
- w najprostszej, jednowymiarowej wersji rozpatrujemy łańcuch N osób („agentów”, „aktorów”)
 - **jak spiny w 1D modelu Isinga!**
- oraz periodyczne warunki brzegowe



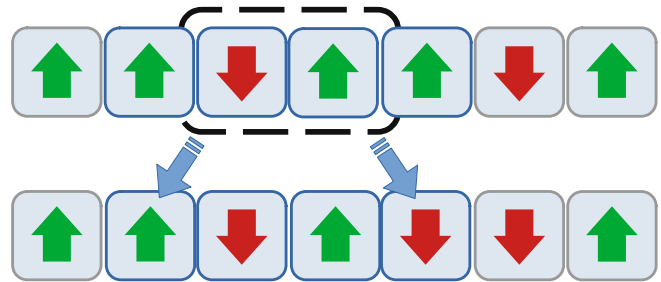
Model Sznajdów

- podstawowe założenia:

- jeśli dwie osoby obok siebie są **zgodne**, to ich sąsiedzi przyjmą tą wspólną opinię za swoją



- jeśli dwie osoby obok siebie są **skłócone**, to ich sąsiedzi przyjmą opinie przeciwne do sąsiada



„united we stand, divided we fall”

Model Sznajdów

- algorytm podstawowej wersji modelu:

(1) ustawiamy stan początkowy

(np. losowe wartości $s_i = \pm 1$, $i=1..N$)

(2) losowo wybieramy **parę** s_i oraz s_{i+1}

(3) **jeśli** $s_i = s_{i+1}$ to $s_{i-1} := s_i$ oraz $s_{i+2} := s_i$

(4) **jeśli** $s_i \neq s_{i+1}$ to $s_{i-1} := -s_i$ oraz $s_{i+2} := -s_{i+1}$

... i w ramach **1 kroku Monte Carlo (MCS, Monte Carlo Step)** N razy powtarzamy (2)-(4)

- modyfikacje p. (4):

„nie rób nic”; albo zmień opinie sąsiadów (s_{i-1} oraz s_{i+2}) nie zawsze, ale tylko z prawdopodobieństwem p

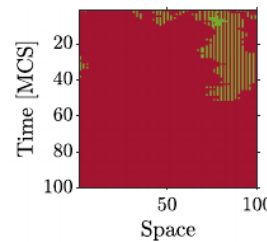
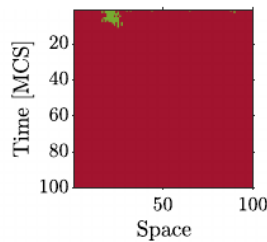
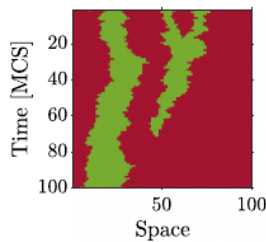
Model Sznajdów

- możliwe stany końcowe:

K. Sznajd-Weron, J. Sznajd and T. Weron

Physica A 565 (2021) 125537

- konsensus (wszyscy zgodni
→ ferromagnetyk z modelu Isinga)



- naprzemiennie występujące ± 1
→ antyferromagnetyk)

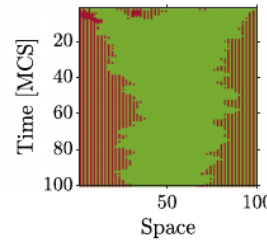
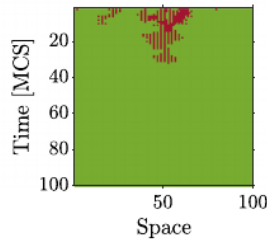
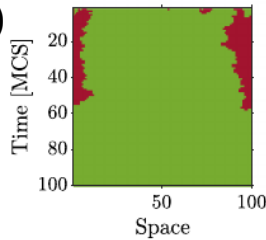
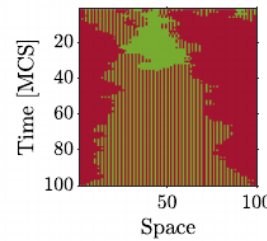
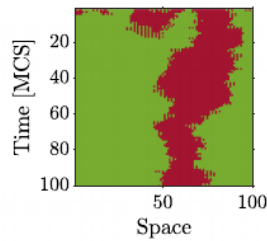
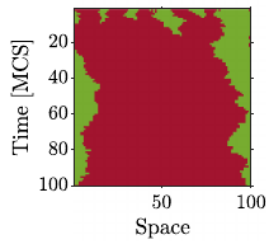
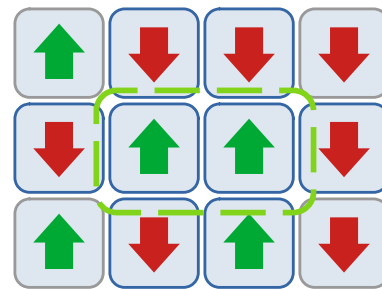


Fig. 1. Time evolution of the one-dimensional generalized SM. Rows in the subplots represent states of the systems that consists of N spins labeled by i . Time, measured in MCS, goes from the top to the bottom row on each subplot. Initially the system is disordered and the concentration of spins up in the system is equal: $c = 0.25$ (upper row), $c = 0.5$ (middle row) and $c = 0.75$ (bottom row). The left column corresponds to $p = 0$ (if you do not know what to do, do nothing), the middle one to $p = 0.5$ (if you do not know what to do, do whatever) and the right one to $p = 1$ (united we stand, divided we fall).

Model Sznajdów

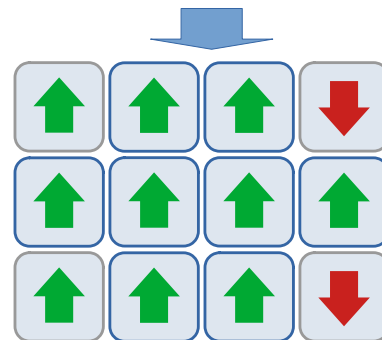
- kolejne warianty modelu:

- dynamika na siatce 2D



- dowolne sieci (trójkątna, graf pełny, „small-world”, bezskalowe, rosnące, ...)

- synchroniczne uaktualnianie sieci



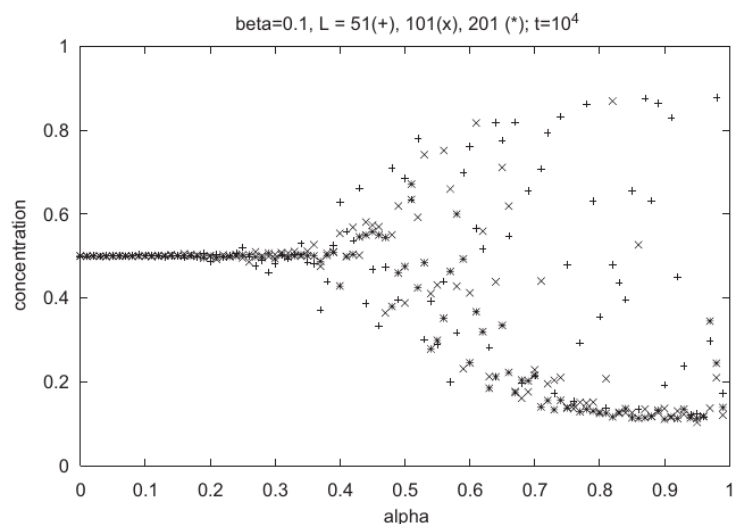
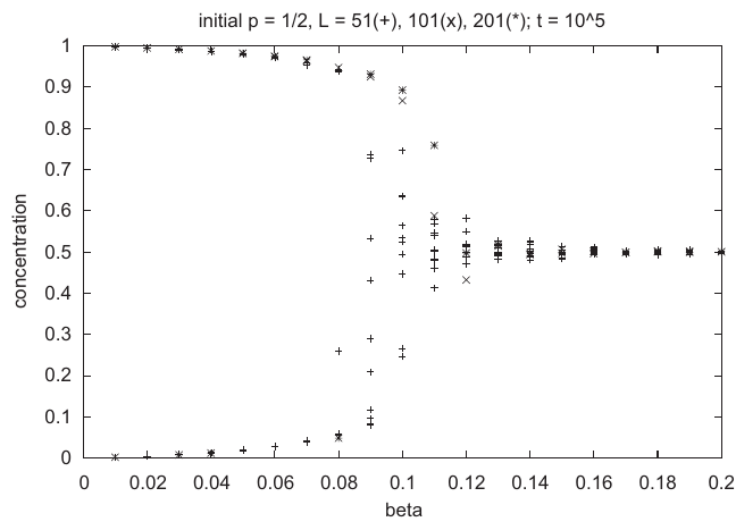
- wiele dyskretnych poziomów opinii, ciągłe wartości opinii

- ...

Model Sznajdów

- kolejne warianty modelu:
 - sąsiedzi przekonywani z pewnym prawdop. α
 - wpływ zewnętrzny z prawdop. β (ew. różne prawdop. przekonywani a do $+1$ i -1)

→ przejścia fazowe



M.Wołoszyn, D.Stauffer, K.Kułakowski, *Physica A* 378 (2007) 453

Model wyborcy (*voter model*)

- również zakładamy opinie $s_i = \pm 1$ (TAK lub NIE)
- założenie: imitacja zachowań sąsiadów
- algorytm:
 - (1) zadajemy stan początkowy
 - (2) losujemy „agenta” i oraz losujemy jego sąsiada j
 - (3) $s_i := s_j$



... i powtarzamy (2)-(3)

Model wyborcy (*voter model*)

- modyfikacje:
 - dowolne sieci (np. 2D, złożone)

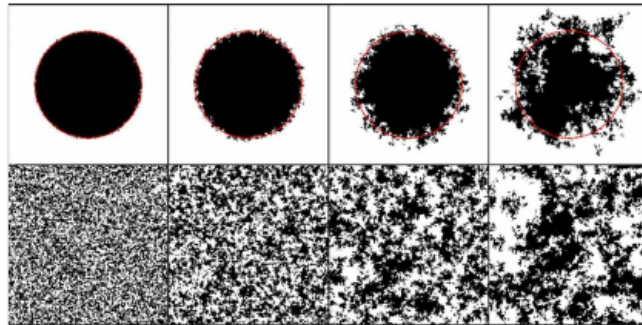


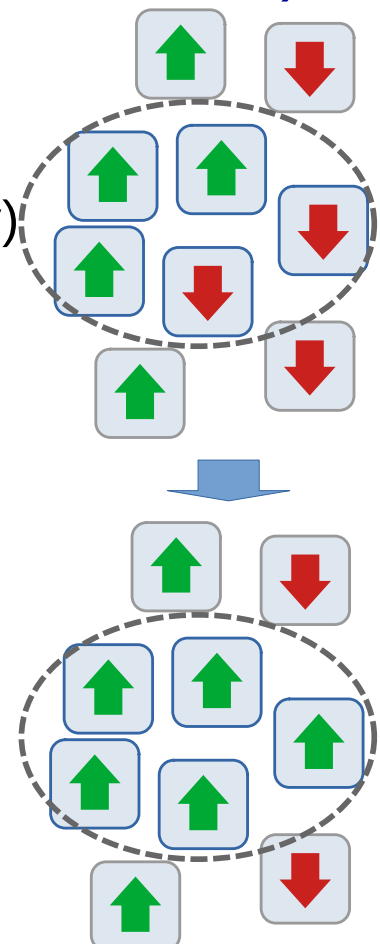
FIG. 2. (Color online) Evolution of a two-dimensional voter model starting from a droplet (top) or a fully disordered configuration (bottom). From [Dornic et al., 2001](#).

- wiele poziomów opinii
- uwzględnienie osobników niepodatnych na wpływ sąsiadów
- komunikacja (wpływ) tylko jeśli opinie się zbytnio nie różnią
- ...

Model większości (*majority rule model*)

- w podstawowej wersji:
 - opinie $s_i = \pm 1$ (TAK / NIE)
 - komunikacja „każdy z każdym” (graf pełny)
- algorytm:
 - (1) zadajemy stan początkowy
 - (2) losujemy grupę r „agentów”, przy czym wartość r wybierana jest losowo z zadanego rozkładu
 - (3) wszyscy członkowie grupy przyjmują opinię większości grupy; w razie równego podziału opinii (możliwe dla parzystego r) można preferować jedną z opinii, np. $+1$

... i powtarzamy (2)-(3)

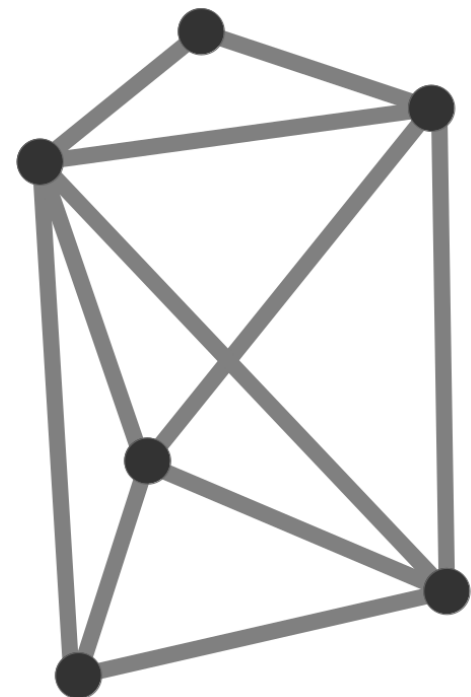


Model większości

- warianty to m.in.
 - akceptacja opinii większości z prawdop. p , a mniejszości z prawdop. $(1-p)$
 - różne sieci i związany z tym sposób wyboru grup
 - uwzględnienie zachowań innych niż w podstawowych regułach: np. „zawsze w kontrze”, odporni na zmianę opinii
 - *majority-vote model*: wybieramy jednego agenta, i tylko jego opinia zmienia się na opinię większości z prawdop. p (przy remisie zmienia swoją opinię na przeciwną z prawdop. $1/2$)

Relacje w sieci społecznej

- **osoby** = **węzły** grafu
 - $i = 1, \dots, N$
- **relacje** między parami osób = **krawędzie** grafu łączące odpowiednie węzły

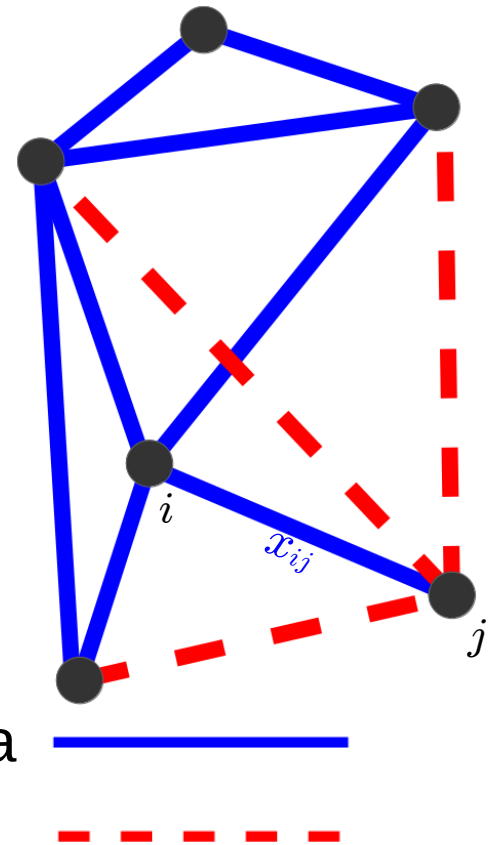


Relacje w sieci społecznej

- **osoby** = **węzły** grafu
 - $i = 1, \dots, N$
- **relacje** między parami osób = **krawędzie** grafu łączące odpowiednie węzły (L – liczba połączeń)
- krawędziom przypisane są wartości $x_{ij} =$

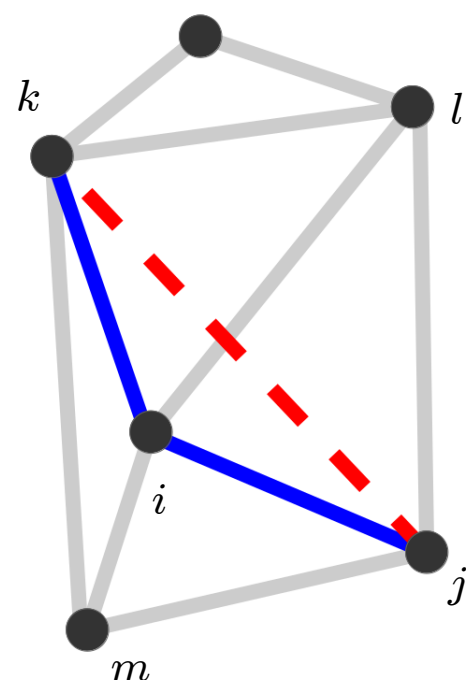
symetryczne

- +1** → relacja przyjazna
- 1** → relacja wroga



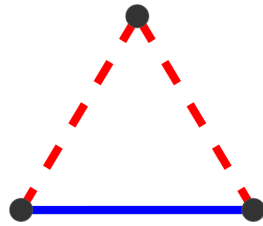
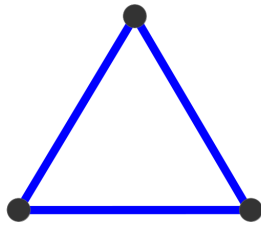
Triady

- **ocena relacji** odbywa się poprzez odniesienie do relacji ze „wspólnymi znajomymi”
 - **triady**
 - (np. dla kształtowania się relacji x_{ij} istotne będą triady ijk, ijl, ijm)
- każda triada = 3 relacje (ijk to x_{ij}, x_{ik}, x_{jk})



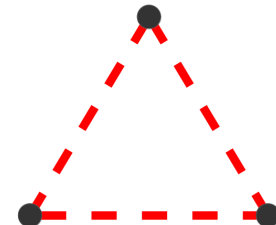
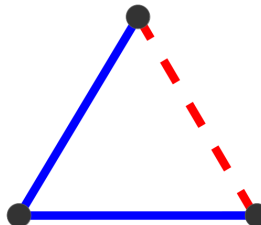
Równowaga Heidera w triadzie

- występuje gdy spełnione są następujące warunki:
 - przyjaciel mojego przyjaciela jest moim przyjacielem
 - wróg mojego przyjaciela jest moim wrogiem
 - przyjaciel mojego wroga jest moim wrogiem
 - wróg mojego wroga jest moim przyjacielem



$$x_{ij}x_{ik}x_{jk} = +1$$

- w przeciwnym wypadku: **dysonans** → brak równowagi

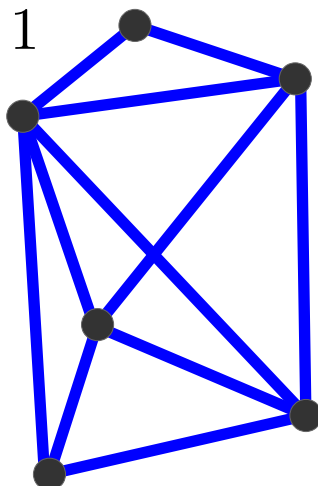


$$x_{ij}x_{ik}x_{jk} = -1$$

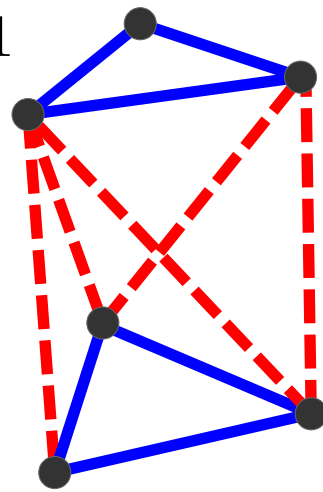
Równowaga całego układu

- układ znajduje się w równowadze jeśli **wszystkie triady są w równowadze**
- dwie możliwości:
 - 1) „raj”
 - 2) „wrogie klikli”

$$\langle x_{ij} \rangle = 1$$



$$\langle x_{ij} \rangle < 1$$



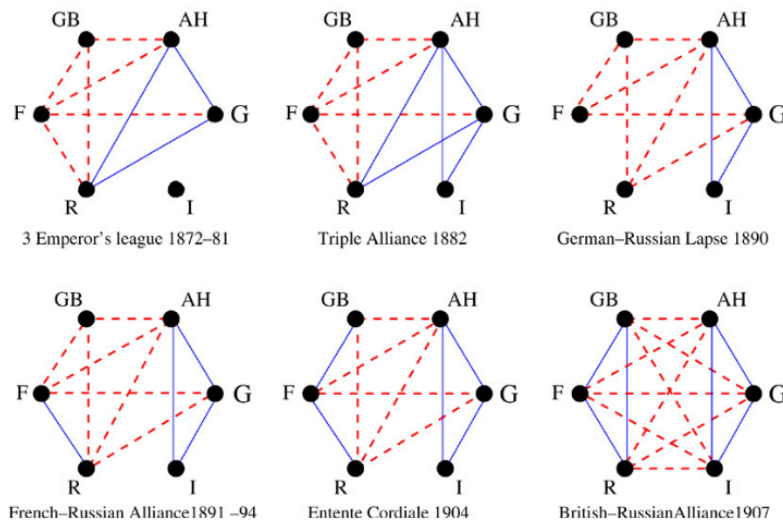
Równowaga całego układu

- układ znajduje się w równowadze jeśli **wszystkie triady są w równowadze**

- dwie możliwości:

1) „raj”

2) „wrogie klikli” $\langle x_{ij} \rangle < 1$



[T. Antal, P.L. Krapivski, S. Redner, *Physica D* 224, 130 (2006)]

Fig. 10. Evolution of the major relationship changes between the protagonists of World War I from 1872–1907. Here GB = Great Britain, AH = Austria–Hungary, G = Germany, I = Italy, R = Russia, and F = France.

Równowaga całego układu

- układ znajduje się w równowadze jeśli **wszystkie triady są w równowadze**

- dwie możliwości:

1) „raj”

2) „wrogie klikli” $\langle x_{ij} \rangle < 1$

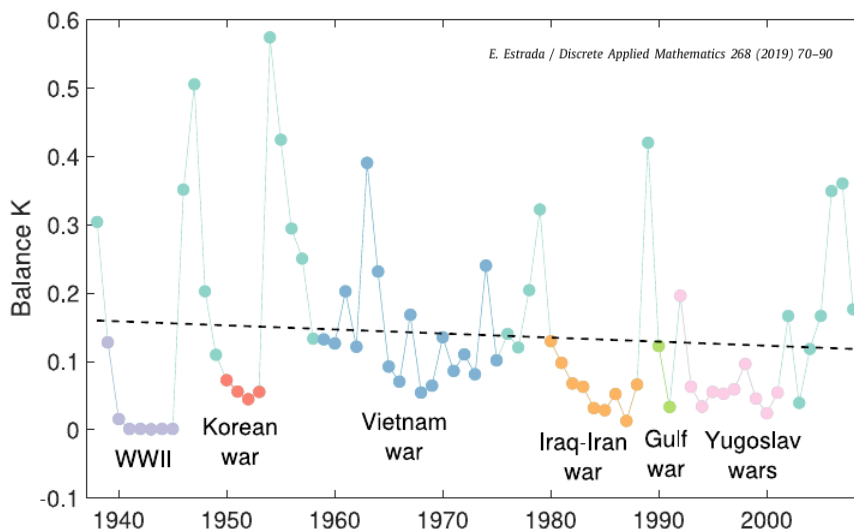


Fig. 6.2. Degree of balance K among the world countries for a period of 70 years between 1938 and 2008. The broken line represents the main trend of the global degree of balance K . We have colored in different colors some of the main international wars during this period. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

Równowaga całego układu

- wszystkie triady w równowadze

$$\Rightarrow \forall_{i,j,k} x_{ij}x_{ik}x_{jk} = +1$$

- wygodna miara pozwalająca wykryć **stan równowagi** (lub pokazać jak blisko/daleko jest do niego):

$$U = -1$$

$$U = - \frac{\sum x_{ij}x_{ik}x_{jk}}{\Delta}$$

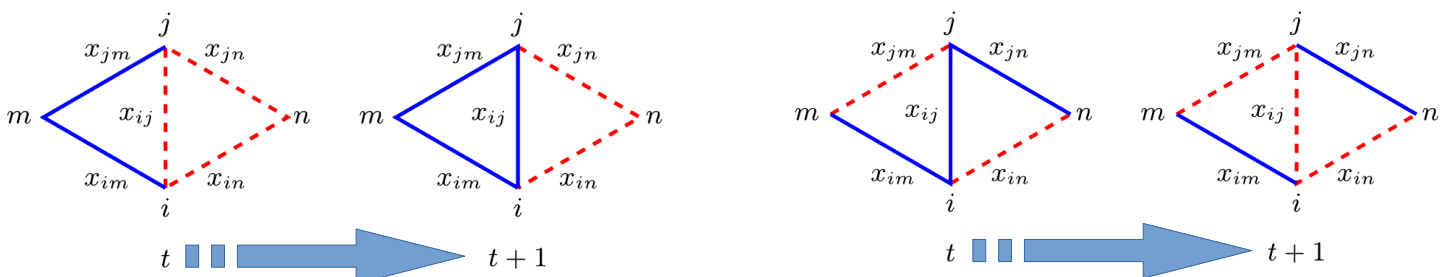
gdzie $\Delta = \sum |x_{ij}x_{ik}x_{jk}|$ – liczba triad

Deterministyczna ewolucja sieci relacji

- dążenie do równowagi poprzez zmiany relacji
- dynamika zdefiniowana poprzez

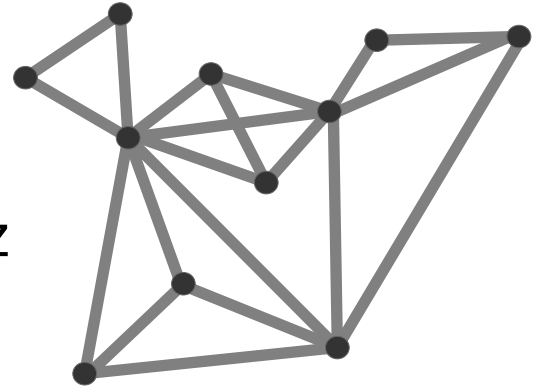
$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} \text{sgn}[\xi_{ij}(t)] & \text{dla } \xi_{ij}(t) \neq 0, \\ x_{ij}(t) & \text{dla } \xi_{ij}(t) = 0, \end{cases}$$

$$\xi_{ij}(t) = x_{im}(t)x_{jm}(t) + x_{in}(t)x_{jn}(t)$$



Struktura sieci

- dla dużych układów nie można się spodziewać występowania relacji „każdym z każdym”, bardziej realistyczne są inne niż graf pełny rodzaje sieci



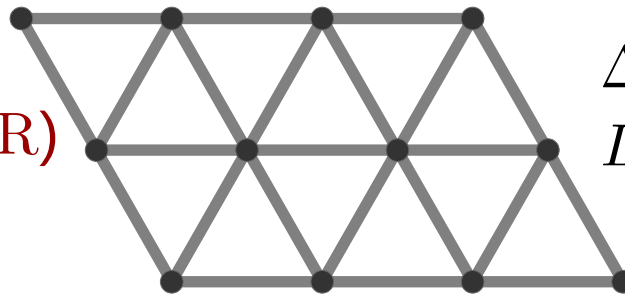
- jak możliwość osiągnięcia równowagi zależy od rodzaju sieci?**

na początek:

sieć trójkątna (TR)

periodyczne

warunki brzegowe



$$\Delta_{TR} = 2N$$

$$L_{TR} = 3N$$

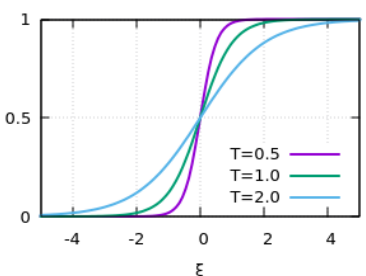
Ewolucja stochastyczna i „szum termiczny”

- dążenie do równowagi Heidera **oraz** równowagi termicznej

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{z prawdop. } p_{ij}(t), \\ -1 & \text{z prawdop. } [1 - p_{ij}(t)], \end{cases}$$

$$p_{ij}(t) = \frac{\exp[\xi_{ij}(t)/T]}{\exp[\xi_{ij}(t)/T] + \exp[-\xi_{ij}(t)/T]}$$

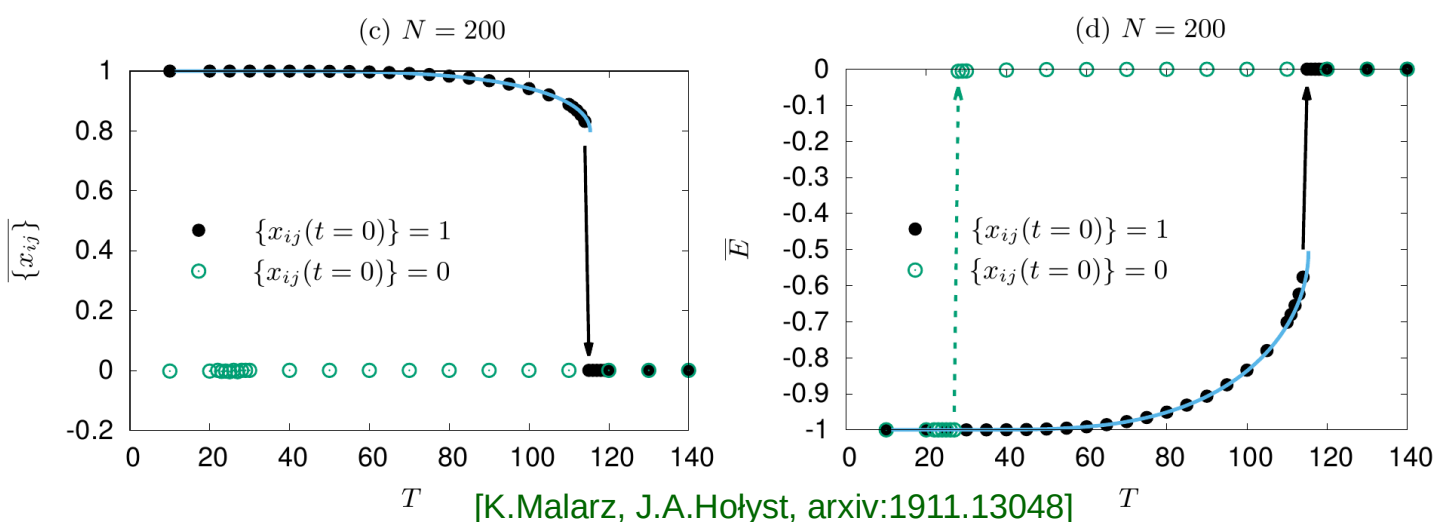
$$\xi_{ij}(t) = x_{im}(t)x_{jm}(t) + x_{in}(t)x_{jn}(t)$$



- 1 krok Monte Carlo = $3N$ synchronicznie wykonywanych prób modyfikacji każdej z $L=3N$ relacji x_{ij}

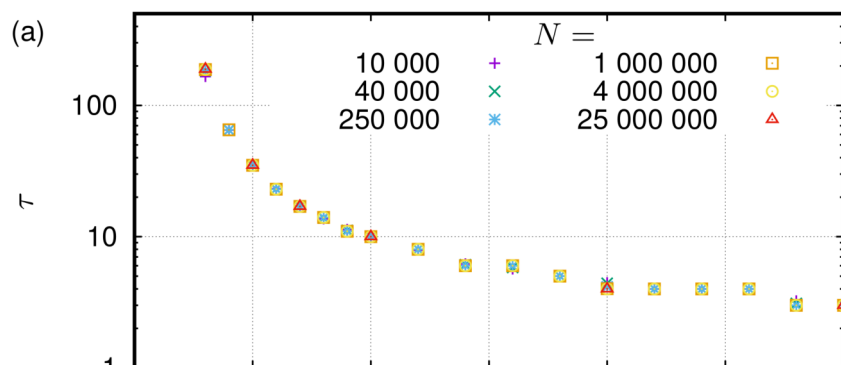
Ewolucja stochastyczna w przypadku grafu pełnego

- **przejście fazowe** pomiędzy stanami:
 - (przynajmniej częściowo) uporządkowanym i w równowadze Heidera
 - chaotycznym i nie wykazującym równowagi



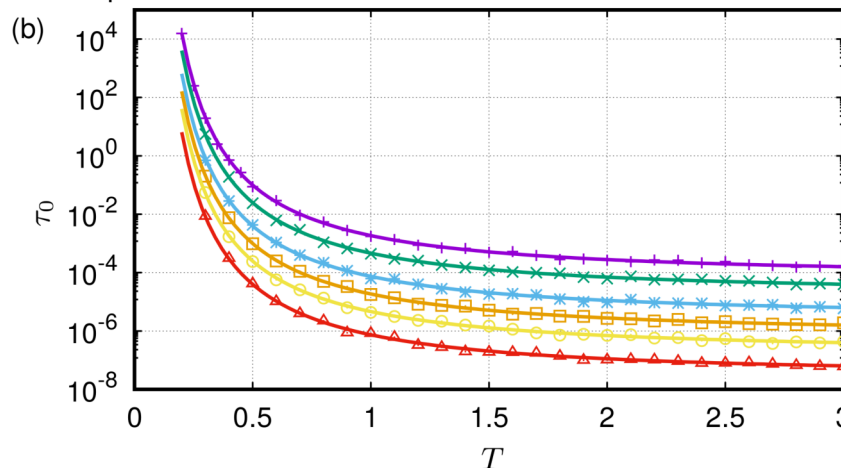
Ewolucja stochastyczna w sieci trójkątnej

czas τ [MCS]
potrzebny
na osiągnięcie
stanu stacjonarnego

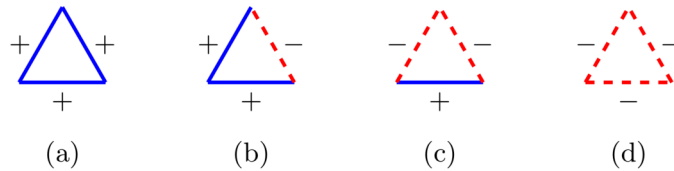


czas τ_0 [MCS]
potrzebny
na odwrócenie
pierwszego x_{ij}

$$\tau_0 = \frac{1 + \exp(4/T)}{3N}$$



Ewolucja stochastyczna w sieci trójkątnej



rozkład rodzajów triad
(1, 0, 0, 0)

↓

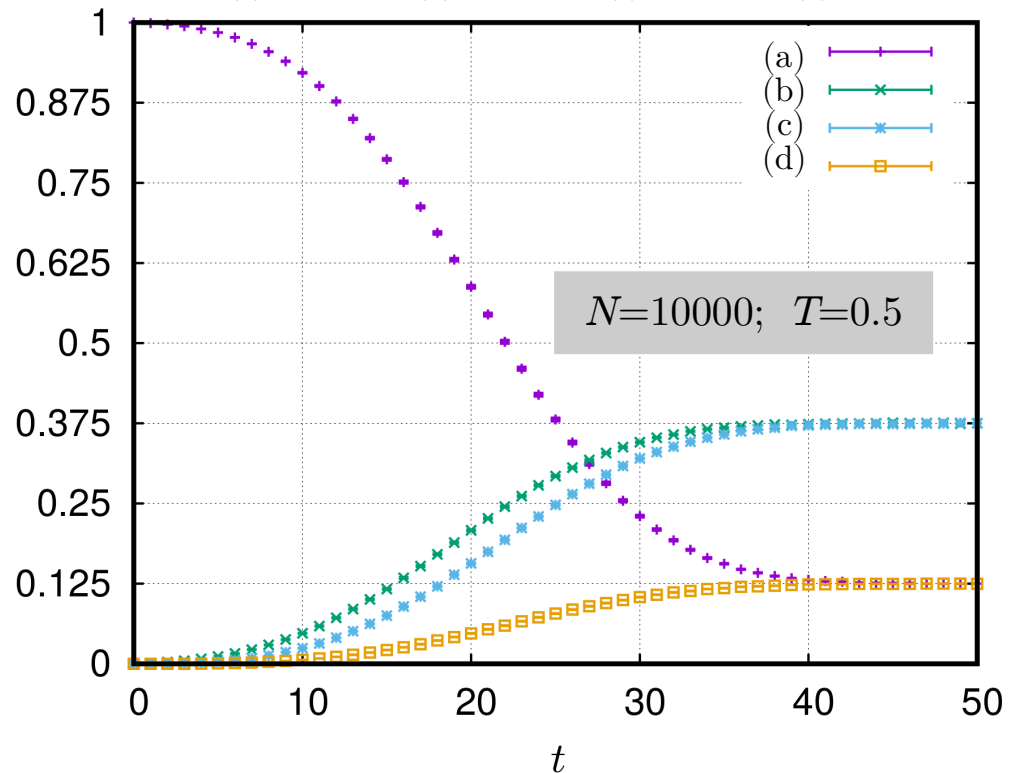
(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)

↑

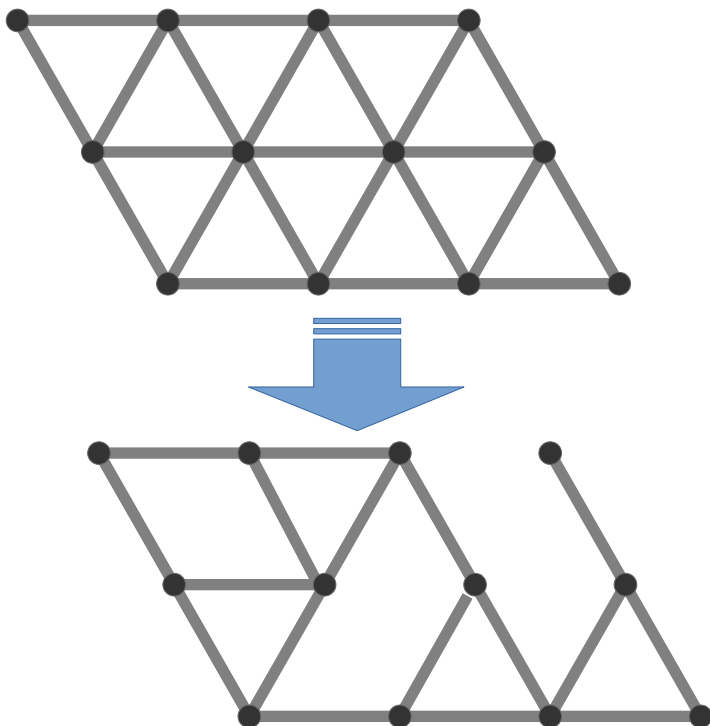
prawdopodobieństwo

$$\binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

$k = 3, 2, 1, 0$ sukcesów w próbach Bernoulliego z $p = 1/2$.



Rozrzedzona sieć trójkątna (DTL, Diluted Triangular Lattice)

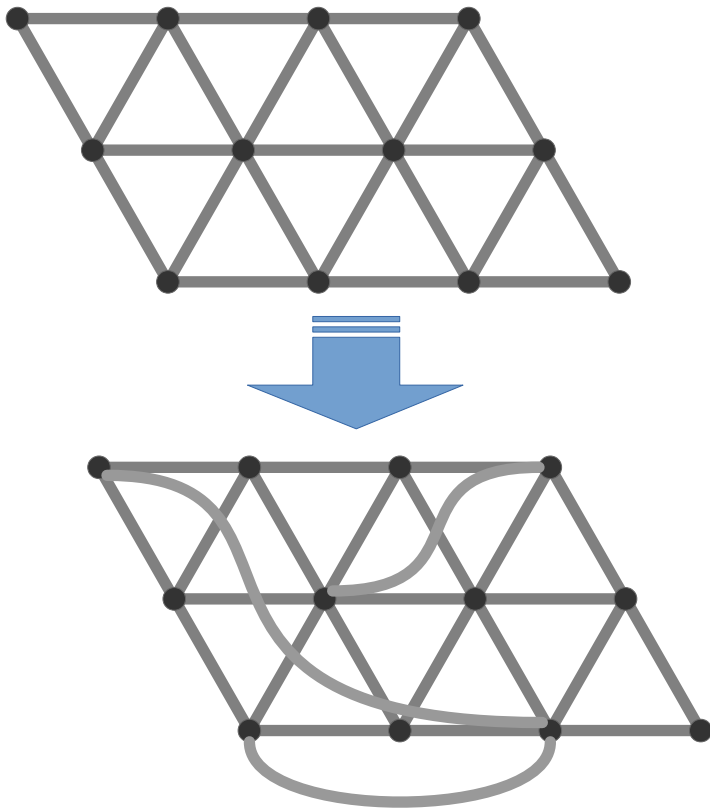


- powstaje poprzez usunięcie q - losowo wybranych krawędzi sieci trójkątnej z $N=W \times W$ węzłami
- losowo wybrane, niezerowe elementy **macierzy połączeń A**
 $a_{ij} = a_{ji} = 1$
 zmieniane na
 $a_{ij} = a_{ji} = 0$

$p_- = 1 - \frac{q_-}{L_{TR}}$ – prawdopodobieństwo że połączenie „przetrwało”

Rozrzedzona sieć trójkątna

(ETL, Enhanced Triangular Lattice)



- powstaje poprzez dodanie do sieci trójkątnej ($N=W^2$) q_+ nowych losowo rozmieszczonych połączeń
- losowo wybrane, zerowe elementy **macierzy połączeń \mathbf{A}**

$$a_{ij}=a_{ji}=0$$

zmieniane na

$$a_{ij}=a_{ji}=1$$

$$p_+ = 1 + \frac{q_+}{L_{\text{TR}}}$$

- dla dowolnej sieci z symetrycznymi: **macierzą połączeń** $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ oraz **macierzą relacji** $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, $x_{ij} \in \{-1, +1\}$

liczba triad $\Delta = \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j} a_{ij} a_{jk} a_{ki} = \frac{1}{6} \text{Tr} \mathbf{A}^3$

liczba połączeń $L = \sum_i \sum_{j>i} a_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{A}^2$

gęstość $D = \frac{L}{L_{\text{CG}}} = \frac{\text{Tr} \mathbf{A}^2}{2 \binom{N}{2}}$

"energia" $U = - \frac{\text{Tr}(\mathbf{A} \circ \mathbf{X})^3}{\text{Tr} \mathbf{A}^3}$

Ewolucja stochastyczna

(uogólniona na dowolną sieć)

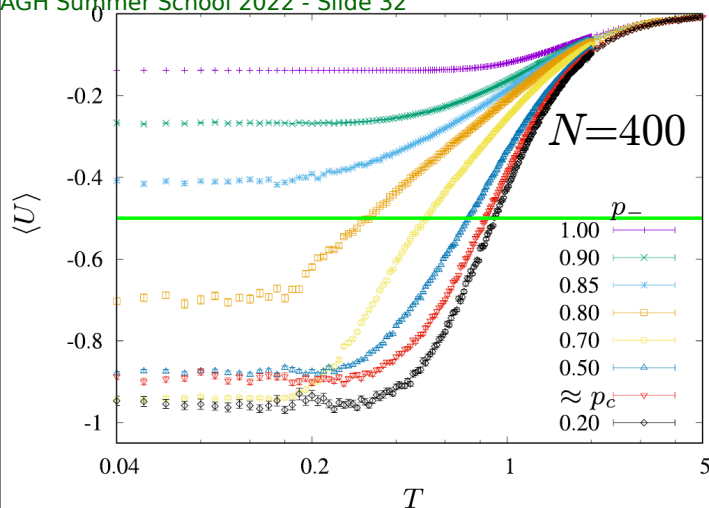
- dążenie do równowagi Heidera oraz równowagi termicznej

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{z prawdop. } p_{ij}(t), \\ -1 & \text{z prawdop. } [1 - p_{ij}(t)], \end{cases}$$

$$p_{ij}(t) = \frac{\exp[\xi_{ij}(t)/T]}{\exp[\xi_{ij}(t)/T] + \exp[-\xi_{ij}(t)/T]}$$

$$\xi_{ij}(t) = \sum_k a_{ik}(t)x_{ik}(t)a_{kj}(t)x_{kj}(t)$$

AGH Summer School 2022 - Slide 32



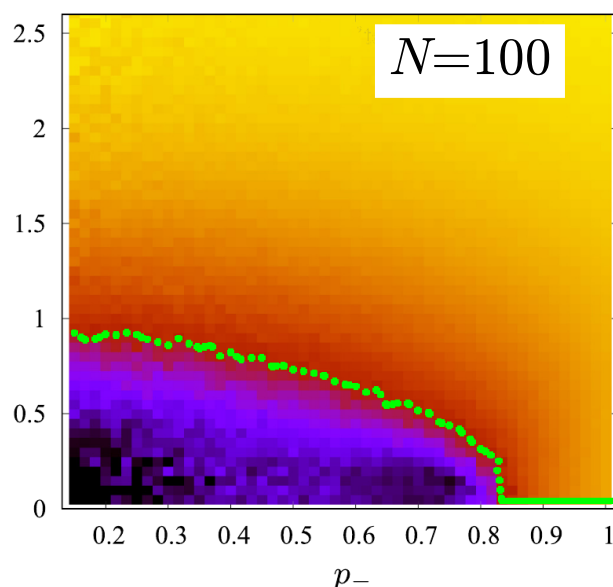
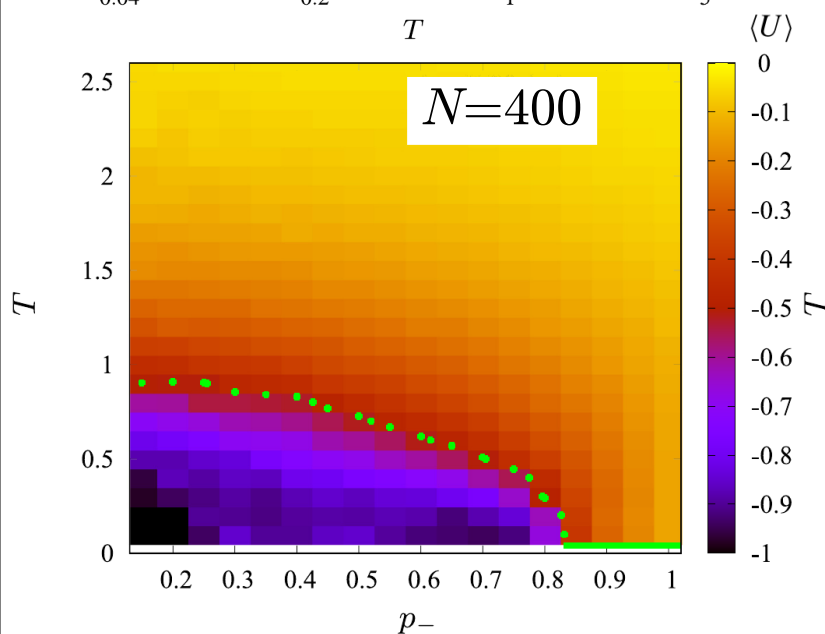
DTL

$p_- = 1$ – sieć trójkątna, $N=W \times W$

$p_c = 2 \sin(\pi/18) \approx 0.347$

– próg perkolacji
dla sieci trójkątnej

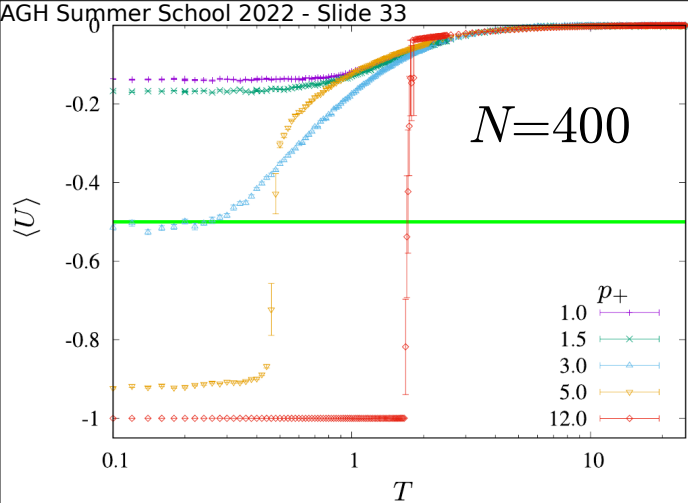
[MW, K.Malarz, *Phys. Rev. E*
105 (2022) 024301]



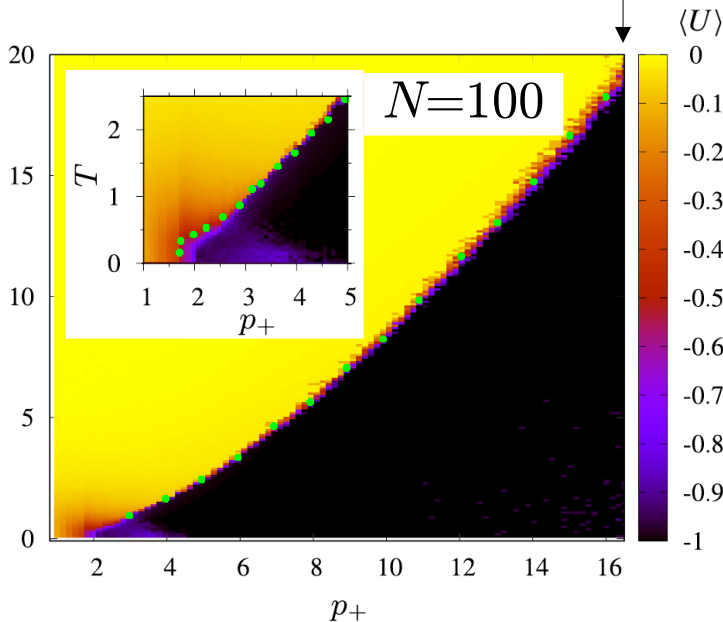
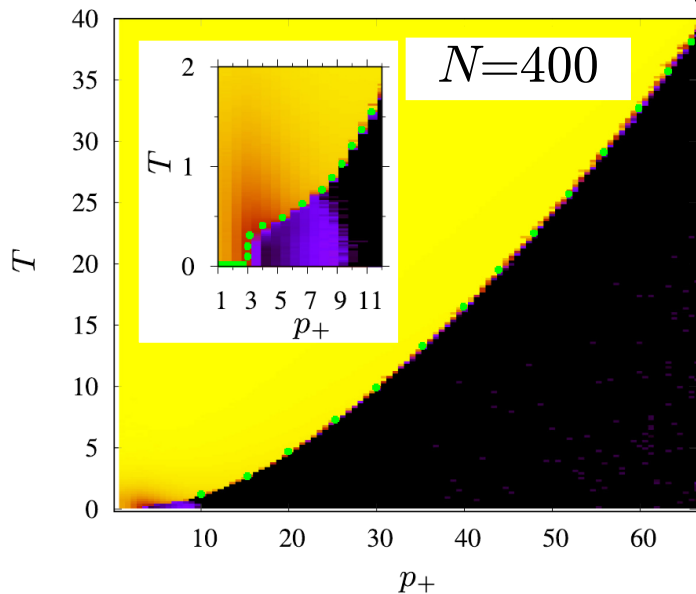
ETL

$p_+ = 1$ – sieć trójkątna, $N=W \times W$

$$p_{CG} = \frac{N-1}{6} = \frac{W^2-1}{6}$$



graf pełny
(Complete Graph, CG)



Przejsięcie fazowe?

„Kumulanta Bindera”

$$K = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle}{3\langle U^2 \rangle^2}$$

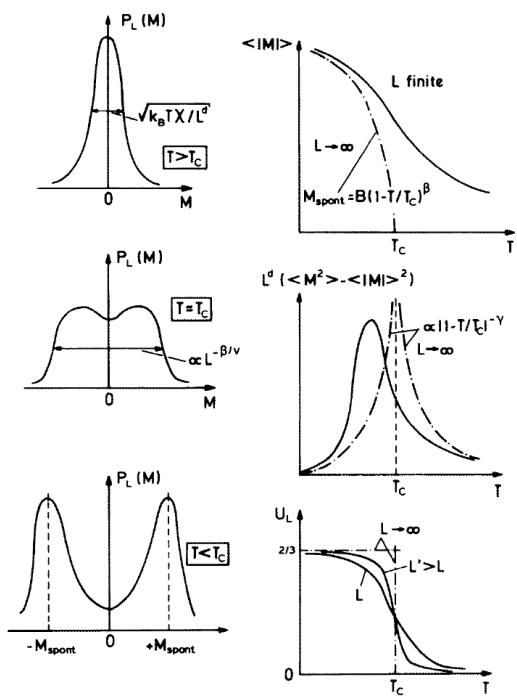


Figure 6. Schematic evolution of the order parameter distribution $P_L(s)$ from $T > T_c$ to $T < T_c$ (from above to below, left-hand side) for an Ising ferromagnet, where s is the magnetization per site, in a box of volume $V = L^d (= L^3$ in $d = 3$ dimensions). The right-hand side shows the corresponding temperature dependence of the mean order parameter $\langle |s| \rangle$, the susceptibility $k_B T \chi' = L^d (\langle s^2 \rangle - \langle |s| \rangle^2)$, and the reduced fourth-order cumulant $U_L = 1 - \langle s^4 \rangle / [3\langle s^2 \rangle^2]$. Dashed curves indicate the singular variation that results in the thermodynamic limit, $L \rightarrow \infty$.

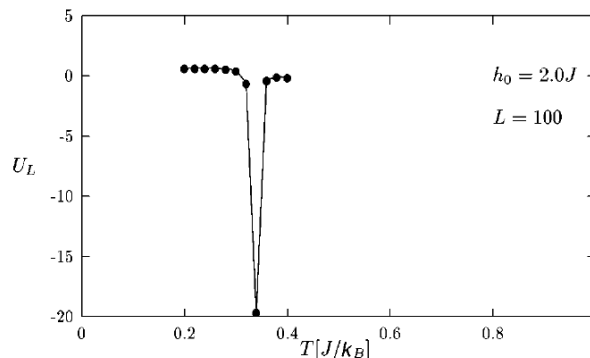
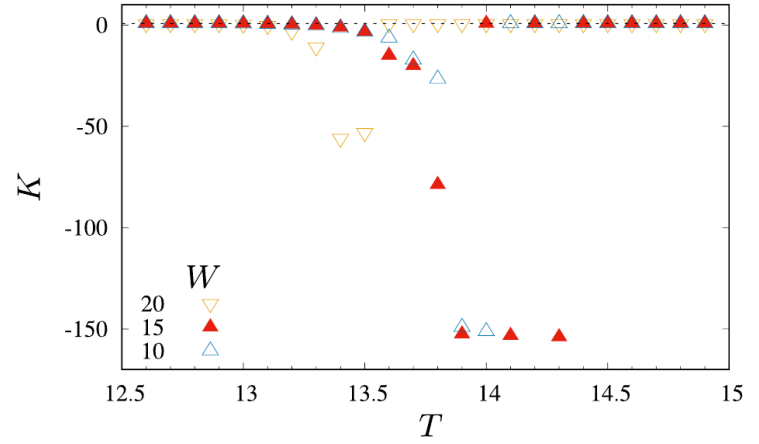
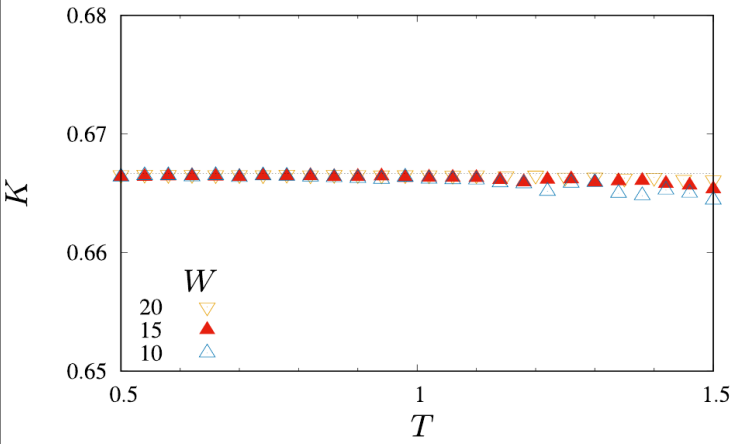


FIG. 4. Temperature (T) variation of the fourth-order Binder cumulant. A deep minimum indicates that the transition is first order and the position of minimum is the transition point.

Przejście fazowe?

DTL $p_- = 0.5 \Rightarrow \bar{k} = 3$

ETL $\bar{k}D^{5/2} = 40$

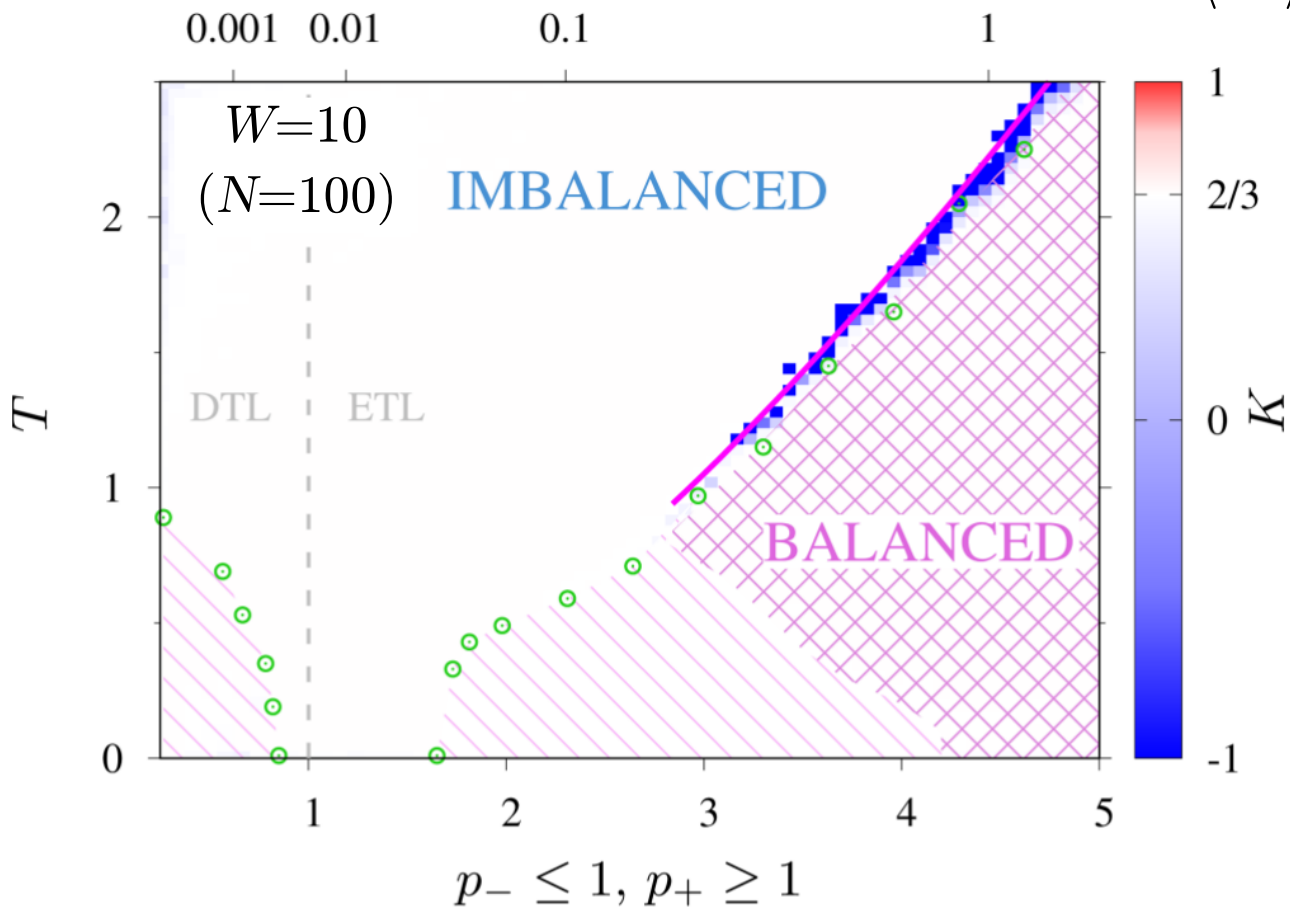


$$K = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle}{3\langle U^2 \rangle^2}$$

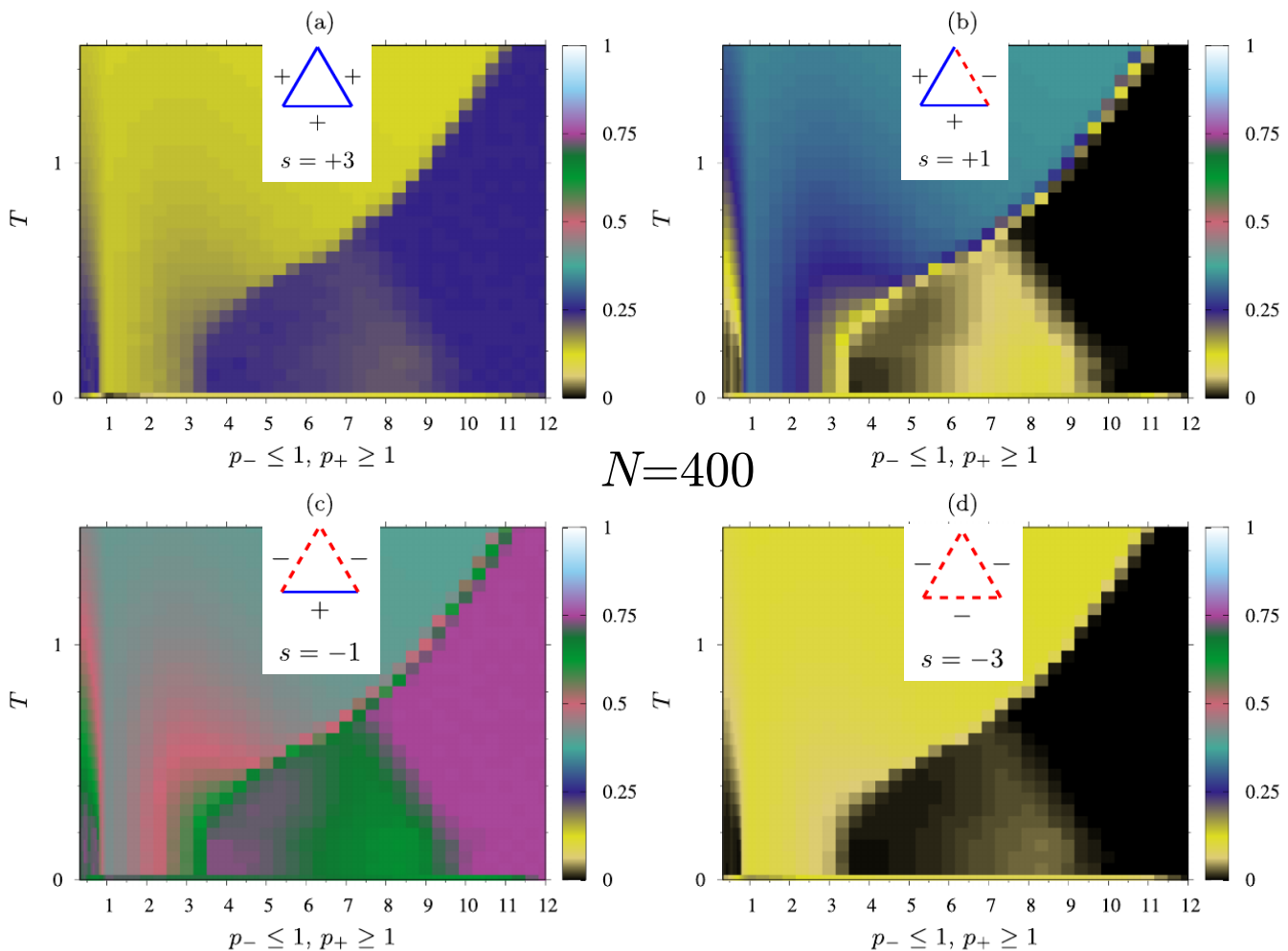
DTL & ETL

$\bar{k}D^{5/2}$

$$K = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle}{3\langle U^2 \rangle^2}$$



DTL & ETL rozkłady poszczególnych rodzajów triad



Literatura

- C. Castellano et al., *Statistical physics of social dynamics*, Reviews of Modern Physics **81** (2009) 591
<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.591> <https://arxiv.org/abs/0710.3256>
- H. Noorazar, *Recent advances in opinion propagation dynamics: a 2020 survey*, Eur. Phys. J. Plus **135** (2020) 521
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00541-2> <https://arxiv.org/abs/2004.05286>
- A. Sirbu et al., *Opinion dynamics: models, extensions and external effects, w: Participatory Sensing, Opinions and Collective Awareness*, Springer, 2016
https://doi.org/10.1007/978-3-319-25658-0_17 <https://arxiv.org/abs/1605.06326>
- A.M. Belaza et al., *Statistical physics of balance theory*, PLoS ONE **12** (2017) e0183696
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0183696>
- K. Kułakowski, *Some Recent Attempts to Simulate the Heider Balance Problem*, Computing in Science and Engineering **9** (2007) 80-85
<https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.85> <https://arxiv.org/abs/physics/0612197>
- A. Fronczak, P. Fronczak, *Świat sieci złożonych: Od fizyki do Internetu*, PWN 2021

Biblioteka do symulacji m.in. dynamiki opinii i epidemii

- **NDlib: a Python Library to Model and Analyze Diffusion Processes Over Complex Networks**
<https://arxiv.org/abs/1801.05854> <https://ndlib.readthedocs.io/en/latest/reference/reference.html#opinion-dynamics>